Aufgabe 4

Quantenteilchen im eindimensionalen Potential

Prof. Dr. R. Kree

Hintergrund Die gebundenen Zustände eines Quantenteilchens der Masse m in einem eindimensionalen Potential $V(x)$ sind als normierbare Lösungen mit negativer Energie der Schrödingergleichung

$$\psi''(x) + u(x)\psi(x) = \kappa^2\psi(x)$$

gegeben, wobei

$$\psi'(x) = \frac{d\psi}{dx}; \quad u(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}V(x); \quad \kappa^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E\,.$$

In einem attraktiven Potential ($V < 0$) findet man üblicherweise eine diskrete Zahl gebundener Zustände mit negativen Energien und ein Kontinuum an Streuzuständen oberhalb des Maximums von V. Ein berühmtes, oder eher berüchtigtes eindimensionales Potential, das all diese Anschauungen und Erwartungen durcheinanderbringt, ist das attraktive $1/x^2$ Potential ($a > 0$):

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for} \quad x \leq 0 \\ -a/x^2 & \text{for} \quad x > 0 \end{cases}$$

Im Folgenden sollen einige Eigenschaften der zugehörigen Schrödingergleichung und der zugehörigen gebundenen Zustände,

$$\hat{\mathbf{H}}\psi(x) = \psi''(x) + \frac{\alpha}{x^2}\psi(x) = \kappa^2\psi(x), \quad \text{mit } \alpha = \frac{2ma}{\hbar^2}\,,$$

untersucht werden.

Bemerkung: $\hat{\mathbf{H}}$ entspricht einer reskalierten negativen Energie. Für Normierbarkeit wird $\psi(x) \to 0$ für $x \to \infty$ benötigt und für Stetigkeit bei $x = 0$ wird $\psi(x) \to 0$ für $x \to 0$ benötigt.

a) [*2 Punkte*] Zeigen Sie, dass es unmöglich ist die Dimensionen der physikalischen Parameter des Problems, $m, \hbar$ und a, in einer einzelnen Energiedimension zu kombinieren. Was können Sie aus diesem Ergebnis lernen?

b) [*2 Punkte*] Angenommen ein gebundener Zustand existiere. Zeigen Sie durch ein Skalierungsargument[4], dass es dann für *jede* negative Energie einen gebundenen Zustand geben muss. Die Existenz eines einzelnen gebundenen Zustands führt also zu dem Schluss, dass das System keinen Grundzustand hat sondern ein nach unten unbeschränktes Kontinuum von Energien gebundener Zustände!

c) [*4 Punkte*] Zumindest für nicht zu große α gibt es keine Probleme, denn dann gibt es keine gebundenen Zustände. Zeigen Sie, dass es keine gebundene Zustände für $\alpha < 1/4$ gibt. Eine

[4] ***Hinweis:*** Skalierung der Ortskoordinate.

Möglichkeit das zu beweisen ist in durch die bekannte algebraische Bestimmung der gebundenen Zustände des harmonischen Oszillators durch Faktorisierung des Hamiltonoperators motiviert. Das harmonische Oszillatorpotential ist x^2, in unserem Fall geht es um x^{-2}. Suchen Sie eine Faktorisierung von $\hat{\mathbf{H}}$, also $\hat{\mathbf{B}}$ so dass $\hat{\mathbf{H}} \propto \hat{\mathbf{B}}^\dagger \hat{\mathbf{B}}$. Was bedeutet das für die möglichen Energien?

Für $\alpha > 1/4$ stößt man auf schwierigere Probleme, die wir hier nicht behandeln wollen.

d) [*2 Punkte*] Der Ursprung allen Übels bei diesem Potential ist, dass es in der Nähe von $x = 0$ zu stark ist. Zeigen Sie, dass die Randbedingung $\psi(0) = 0$, die notwendig ist für Stetigkeit, nicht ausreicht um sicherzustellen, dass $\hat{\mathbf{H}}$ hermitesch ist in $\mathcal{L}_2(0, \infty)$, dem Raum der quadratintegrablen Funktionen über $[0, \infty)$.